Sur l'équivalence entre des types particuliers des équations de Navier-Stokes et de Schrödinger non linéaire

K. Dietrich, D. Vautherin

Tome 46 N° 3 MARS 1985

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

J. Physique **46** (1985) 313-316 MARS **1985**, PAGE 313

Classification
Physics Abstracts
24.90 — 47.10

Sur l'équivalence entre des types particuliers des équations de Navier-Stokes et de Schrödinger non linéaire

K. Dietrich

Physik Department der Technischen Universität München, D-8046 Garching, R.F.A.

et D. Vautherin

Division de Physique Théorique (*), Institut de Physique Nucléaire, 91406 Orsay Cedex, France

(*Reçu le 18 juin 1984, accepté le 8 novembre 1984*)

Résumé. — Nous étudions plusieurs généralisations de l'équivalence bien connue entre les équations de l'hydrodynamique et l'équation de Schrödinger non linéaire. Pour un fluide visqueux, irrotationnel, de viscosité cinématique constante, nous obtenons une équation de Schrödinger non linéaire, analogue à celle proposée par Kostin pour une description quantique de la friction. Nous traitons également le cas de l'écoulement rotationnel d'un tel fluide, et celui de l'écoulement à symétrie sphérique d'un fluide de viscosité constante.

Abstract. — We derive a Schrödinger equation equivalent to the Navier-Stokes equation in the special case of constant kinematic viscosities. This equation contains a non-linear term similar to that proposed by Kostin for a quantum description of friction.

1. Introduction.

L'équivalence de l'équation de Schrödinger à un corps avec les équations de l'hydrodynamique pour un fluide non visqueux et irrotationnel est connue depuis longtemps [1]. Elle a fait l'objet de nombreux travaux, dont certains sont liés à des tentatives d'interprétations nouvelles de la mécanique quantique [2], d'autres à l'intérêt suscité récemment par l'équation de Schrödinger non linéaire [3]. L'objet de la présente note est de montrer que cette équivalence peut être généralisée au cas de certains fluides visqueux et de certains écoulements rotationnels.

Dans le paragraphe 2 nous étudions tout d'abord le cas de l'écoulement potentiel d'un fluide non visqueux et dans le paragraphe 3 celui d'un fluide visqueux dont la viscosité croît linéairement avec la densité. Pour ce cas particulier nous montrons que l'équation de Navier-Stokes est équivalente à une équation de type Schrödinger non linéaire. Cette équation est très semblable à une équation proposée en 1972 par Kostin [4] pour une description quantique de la friction et étudiée depuis dans ce contexte par plusieurs auteurs [5-9]. Il convient de noter que l'hypothèse d'une viscosité proportionnelle à la densité est valable pour de nombreux systèmes, en particulier pour la matière nucléaire produite dans les collisions de noyaux à des énergies de l'ordre de 100 MeV par nucléon [10]. Dans le paragraphe 4 nous traitons le cas plus général d'un écoulement rotationnel avec viscosité linéaire en densité.

Nous ne sommes pas parvenus à formuler les équations de l'hydrodynamique avec viscosité constante sous forme d'une équation d'onde, sauf dans le cas particulier d'un écoulement potentiel à symétrie sphérique qui est présenté dans le paragraphe 5. Le paragraphe 6 contient un bref résumé de nos principales conclusions.

Dans tout ce qui suit nous considérons uniquement des écoulements barotropes i.e. pour lesquels la pression P ne dépend que de la densité de masse

$$P = P(\rho) . \tag{1}$$

(*) Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Ceci est le cas notamment lorsque l'entropie par particule σ est une constante au temps initial et que σ est une quantité conservée, telle que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\sigma = 0\,, \qquad (2)$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse. Bien entendu l'équation (2) ne peut être qu'approchée pour un fluide visqueux. Toutefois pour que l'équation (1) soit valable il suffit que la dépendance en σ de la fonction $P(\rho, \sigma)$ soit suffisamment faible, ce qui semble être le cas pour les collisions de noyaux à haute énergie [11-13].

Lorsque l'équation (1) est valable on peut trouver une fonction $h(\rho)$ — qui n'est autre que l'enthalpie par unité de masse — telle que l'on ait

$$\nabla h = \frac{1}{\rho}\nabla P\,. \qquad (3)$$

Pour un fluide dont la viscosité est proportionnelle à la densité l'équation (3) entraîne que la densité $\rho(\mathbf{r}, t)$ du fluide n'apparaît pas explicitement dans l'équation de Navier-Stokes. Cette simplification est essentielle pour construire une équation d'onde équivalente aux équations de l'hydrodynamique.

2. Ecoulement potentiel sans viscosité.

Rappelons tout d'abord que pour un écoulement potentiel sans viscosité les équations de l'hydrodynamique se réduisent [14] à l'équation de continuité

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\nabla\chi) = 0\,, \qquad (4)$$

et à l'équation d'Euler

$$\dot{\chi} + \frac{1}{2}(\nabla\chi)^2 + h(\rho) = 0\,, \qquad (5)$$

où h est l'enthalpie spécifique, reliée à la pression P par l'équation (3). Les équations (4) et (5) déterminent l'évolution dans le temps de la densité $\rho(\mathbf{r}, t)$ et du potentiel des vitesses $\chi(\mathbf{r}, t)$ défini par $\mathbf{v} = \nabla\chi$. Par la transformation de Madelung [1]

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{m}}\exp[im\chi(\mathbf{r}, t)/\hbar]\,, \qquad (6)$$

où m et $\hbar$ sont deux constantes arbitraires non nulles ayant la dimension d'une masse et d'une action respectivement, on trouve que les équations (4) et (5) sont équivalentes à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta + u \right\}\varphi\,. \qquad (7)$$

Dans cette équation le potentiel $u(\rho)$ est donné par la relation

$$u(\mathbf{r}, t) = mh[\rho(\mathbf{r}, t)] + \frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}}\Delta\sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}\,. \qquad (8)$$

Un choix naturel de la constante arbitraire m consiste à prendre la masse des particules constituant le fluide. Dans ce cas il convient de normaliser, au temps initial t_0, la fonction φ au nombre total A de particules contenues dans le fluide

$$A = \int |\,\varphi(\mathbf{r}, t_0)\,|^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \qquad (9)$$

On peut remarquer que l'équation (7) a la même structure que les équations de Hartree-Fock dépendant du temps. Toutefois cette analogie est purement formelle. En effet, pour l'équation (7), la forme très particulière du potentiel u donnée par l'expression (8) permet d'éliminer la constante $\hbar$ des équations du mouvement et d'obtenir la forme équivalente (4, 5).

3. Ecoulement potentiel avec viscosité linéaire en densité.

Pour un fluide visqueux l'équation d'Euler (5) doit être remplacée par l'équation de Navier-Stokes

$$\rho\left\{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v}\right\} = -\nabla P + \xi\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} + \eta\,\Delta\mathbf{v}\,. \qquad (10)$$

Dans le cas où les coefficients de viscosité ξ et η dépendent linéairement de la densité

$$\xi = \mu\rho\,, \quad \eta = \nu\rho\,, \qquad (11)$$

i.e. lorsque les coefficients de viscosité cinématique μ et ν sont constants, on peut trouver des solutions de (10) sous la forme $\mathbf{v} = \nabla\chi$ pourvu que la fonction χ satisfasse l'équation

$$\dot{\chi} + \frac{1}{2}(\nabla\chi)^2 + h(\rho) = (\mu + \nu)\,\Delta\chi\,. \qquad (12)$$

Pour cette équation il est encore possible de trouver une équation de Schrödinger équivalente aux équations du mouvement (4) et (10). Celle-ci s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta + u + \frac{\hbar}{2\,i}(\mu + \nu)\,\Delta\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi^*}{\varphi}\right)\right\}\varphi\,. \qquad (13)$$

On peut faire au sujet de cette équation les remarques suivantes : 1) les coefficients de viscosité cinématique μ et ν apparaissent dans l'équation de Schrödinger dans un terme impair par renversement du temps ([1]) i.e. qui change de signe lorsque l'on échange φ et φ^* ; 2) ce terme est identique à l'opérateur Laplacien agissant sur le terme proposé par Kostin [4] pour une

---

([1]) De même qu'une viscosité nulle abaisse l'ordre de l'équation de Navier-Stokes, on voit que pour $\mu = \nu = 0$ le terme en φ^*/φ, dont l'élimination conduit à des dérivées secondes de $\mathbf{v}$, disparaît de (13).

description quantique de la dissipation. Toutefois dans notre cas l'équation (13) n'est qu'une reformulation mathématique des équations de l'hydrodynamique classique ; 3) la présence de l'opérateur Laplacien dans le dernier terme de l'équation (13) est satisfaisante dans la mesure où elle permet d'éviter un amortissement artificiel des solutions en translation uniforme, comme c'est le cas pour l'hamiltonien de Kostin.

Si le fluide est soumis à un champ externe, par exemple un champ de gravitation, il est encore possible de déduire une équation d'onde équivalente à l'équation de Navier-Stokes. Pour une force externe décrite par un terme $-\rho\nabla\Phi$ dans le second membre de l'équation (10), on trouve qu'il suffit, dans l'expression (8) du potentiel u, de remplacer l'enthalpie spécifique h par $h + \Phi$.

4. Ecoulement rotationnel avec viscosité linéaire en densité.

Dans ce cas décomposons la vitesse $\mathbf{v}$ en

$$\mathbf{v} = \nabla\chi + \mathbf{A} \tag{14}$$

et substituons cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes (10), pour laquelle nous supposerons, comme au paragraphe précédent, que les coefficients de viscosité sont proportionnels à la densité (11). On aboutit alors à l'équation suivante

$$\nabla\left\{\dot{\chi} + \frac{v^2}{2} + h(\rho) - (\mu + \nu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right\} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,. \tag{15}$$

La décomposition (14) n'est évidemment définie qu'à une jauge près : d'addition d'une fonction θ à χ et d'un champ $-\nabla\theta$ à $\mathbf{A}$ ne modifie pas le résultat.

Supposons que l'on ait trouvé une solution de l'équation de Navier-Stokes sous la forme $\mathbf{v} = \nabla\chi' + \mathbf{A}'$ et que la fonction

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\chi'}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h(\rho) - (\mu + \nu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,, \tag{16}$$

soit non nulle. Alors par une transformation de jauge

$$\chi = \chi' + \theta\,, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla\theta\,, \tag{17}$$

telle que l'on ait

$$\dot{\theta} + f = 0\,, \tag{18}$$

on voit que l'on peut se ramener aux équations

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h(\rho) - (\mu + \nu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,. \tag{20}$$

Réciproquement si χ et $\mathbf{A}$ sont solutions des équations (19) et (20), le champ $\mathbf{v} = \nabla\chi + \mathbf{A}$ est solution de l'équation de Navier-Stokes. Remarquons que l'équation (18) fixe seulement la dérivée temporelle de la jauge et que les solutions de (19) et (20) ne sont donc définies qu'à une jauge indépendante du temps près.

A partir des équations (19) et (20) on peut voir que, dans le cas où les viscosités cinématiques sont constantes (11), les équations de l'hydrodynamique (4) et (10) sont équivalentes au système suivant

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + m\mathbf{A})^2 + u + (\mu + \nu)\left[m\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{\hbar}{2i}\,\Delta\,\mathrm{Log}\left(\frac{\varphi^*}{\varphi}\right)\right]\right\}\varphi\,, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,, \tag{22}$$

où $\mathbf{v}$, φ et u sont définis par les équations (14), (6) et (8) respectivement. Dans l'équation (21) $\mathbf{p}$ est la notation usuelle pour l'opérateur $-i\hbar\nabla$.

Il est facile de vérifier que l'équation (21) est invariante — comme le système (19, 20) — par la transformation de jauge indépendante du temps

$$\varphi' = \varphi\,\exp[im\theta(\mathbf{r})/\hbar]\,, \tag{23}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\theta(\mathbf{r})\,. \tag{24}$$

Si l'on excepte le terme de friction, l'équation (21) a la même forme que l'équation de Schrödinger pour une particule chargée dans un champ magnétique $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Par ailleurs l'équation d'évolution du champ $\mathbf{B}$, déduite de (22) s'écrit

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu\,\Delta\mathbf{B}\,. \tag{25}$$

Cette équation a la même forme que l'équation d'évolution du champ magnétique dans un plasma [15, 16]

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0\,\sigma}\Delta\mathbf{B} \tag{26}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et σ la conductivité du plasma. Comme il est montré dans la référence [15], l'équation (25) entraîne, à la limite où ν tend vers zéro, que le flux de $\mathbf{B}$ à travers une surface se déplaçant avec le fluide reste constant au cours du temps.

5. Ecoulement à symétrie sphérique avec viscosité constante.

L'hypothèse (11) d'une viscosité proportionnelle à la densité présente l'inconvénient de ne pas entraîner nécessairement une décroissance au cours du temps de l'énergie du fluide

$$E = \int\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho\varepsilon(\rho)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{27}$$

où ε est l'énergie spécifique qui satisfait $P = \rho^2 \, d\varepsilon/d\rho$ et $h = \varepsilon + P/\rho$. En effet si on calcule la dérivée par rapport au temps de (27) pour un écoulement irrotationnel on obtient, en utilisant (11) et (12), la quantité

$$\dot{E} = -(\mu + \nu) \int (\rho \, \Delta\chi + \nabla\rho . \nabla\chi) \, \Delta\chi \, d\mathbf{r} , \quad (28)$$

qui peut être positive ou négative. Le même inconvénient existe pour l'hamiltonien de Kostin (2), pour lequel le terme de dissipation quantique n'entraîne pas nécessairement une décroissance de l'énergie $E = \langle T + u \rangle$. Ces remarques nous ont conduit à examiner le cas où les coefficients de viscosité eux-mêmes ξ et η sont constants. Dans ce cas il ne semble plus possible de construire en général une équation de Schrödinger équivalente à l'équation de Navier-Stokes. Ceci reste possible par contre pour un écoulement à symétrie sphérique. Ce cas est intéressant, notamment lorsque l'on considère les vibrations monopolaires d'un noyau [17], ou encore lorsque l'on calcule l'explosion d'une boule de feu formée après collision de deux noyaux à haute énergie [18]. Supposons donc que l'on ait

$$\mathbf{v} = \nabla\chi(|\mathbf{r}|), \quad \rho = \rho(|\mathbf{r}|), \quad \xi \text{ et } \eta \text{ constants} . \quad (29)$$

Définissons alors une fonction $G(r, t)$ telle que

$$\nabla G(r, t) = \frac{1}{\rho(r, t)} \nabla \, \Delta\chi(r, t) . \quad (30)$$

Il est alors facile de voir que dans ce cas particulier l'équation de Navier-Stokes est équivalente à l'équation de Schrödinger suivante

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\,m} \Delta + u - m(\xi + \eta) \, G \right\} \varphi . \quad (31)$$

Avec les hypothèses (29) l'énergie (27) décroît toujours au cours du temps car on a alors

$$\dot{E} = -(\xi + \eta) \int (\Delta\chi)^2 \, d\mathbf{r} . \quad (32)$$

(2) Pour l'hamiltonien de Kostin la valeur moyenne de l'hamiltonien H décroît bien au cours du temps [4], mais, comme pour l'équation de Schrödinger cubique, $\langle H \rangle$ n'est pas l'énergie du fluide car H est non linéaire.

6. Conclusion.

Nous avons montré que pour un écoulement potentiel avec viscosité cinématique constante il est possible de déduire une équation de Schrödinger non linéaire équivalente aux équations de l'hydrodynamique. Cette équation fait intervenir un terme non invariant par renversement du temps, analogue au terme phénoménologique proposé par Kostin pour introduire une dissipation dans l'équation de Schrödinger. Nous avons également montré que, moyennant l'introduction d'un champ vectoriel supplémentaire, il est possible de décrire un écoulement rotationnel. Dans ce cas l'équation de Schrödinger obtenue ressemble à celle d'une particule dans un champ magnétique, et possède des propriétés d'invariance de jauge analogues. Enfin, bien que n'ayant pu formuler de façon générale les équations de l'hydrodynamique avec viscosité constante sous forme d'une équation d'onde, nous sommes parvenus à traiter le cas particulier intéressant d'un écoulement à symétrie sphérique.

Remerciements.

Nous souhaitons remercier M. Vénéroni pour de nombreuses discussions.

Bibliographie

[1] MADELUNG, E., *Z. Phys.* **40** (1926) 322
[2] BOHM, D., *Phys. Rev.* **85** (1952) 166.
[3] SPIEGEL, E. A., *Physica* **10** (1980) 236.
[4] KOSTIN, D., *J. Chem. Phys.* **57** (1972) 3589 ; *J. Stat. Phys.* **12** (1975) 145.
[5] KAN, K. K. and GRIFFIN, J. J., *Phys. Lett.* **50B** (1975) 241 ;
IMMELE, J. K., KAN, K. K. and GRIFFIN, J. J., *Nucl. Phys.* **A 241** (1975) 47.
[6] HASSE, R. W., *J. Math. Phys.* **16** (1975) 2005.
[7] ALBRECHT, K., *Phys. Lett.* **56 B** (1975) 127.
[8] SÜSSMANN, G., cité par R. W. Hasse, référence [6].
[9] HERNANDEZ, E. S., MYERS, W. D., RANDRUP, J. and REMAUD, B., *Nucl. Phys.* **A 361** (1981) 483.
[10] MALFLIET, R., Communication privée.
[11] SIEMENS, P. J., KAPUSTA, J. T., *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1486.
[12] STÖCKER, H., CUSSON, R. Y., MARUHN, J. A. and GREINER, W., *Z. Phys.* **A 294** (1980) 125, et références aux travaux antérieurs.
[13] NIX, J. R. and STROTTMAN, D., *Phys. Rev.* **C 23** (1981) 2548, et références contenues dans cet article.
[14] LANDAU, L. D. and LIFSCHITZ, E., *Mécanique des Fluides* (Mir, Moscou) 1960.
[15] LANDAU, L. D. and LIFSCHITZ, E., *Electrodynamique des milieux continus*, (Mir, Moscou) 1969, paragraphe 51.
[16] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York) 1962, chapitre 10.
[17] AUERBACH, N. and YEVERECHYAHA, A., *Ann. Phys.* **95** (1975) 35.
[18] BONDORF, J. P., GARPMAN, S. I. A. and ZIMANYI, J., *Nucl. Phys.* **A 296** (1978) 320.